

Beweis von Lemma 4.20:

Wähle in \mathcal{B} einen Weg v_0, \dots, v_n ,
der sich nicht verlängern lässt.

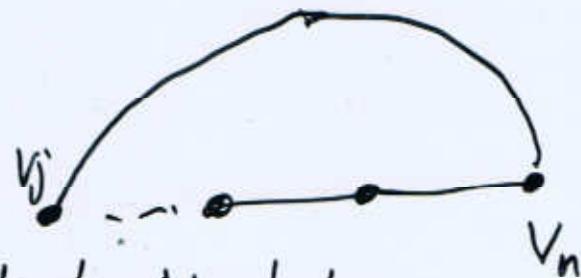


Da \mathcal{B} endlich ist, existieren solche
maximalen Wege.

1. Fall: v_0 und v_n haben keinen
weiteren Nachbarn außer v_i

bzw. v_{n-1} .
 $\Rightarrow v_0$ und v_n haben Grad 1,
sind also Endknoten. Fertig.

2. Fall:



v_n hat Nachbarn
außer v_{n-1} , und der Nachbar
ist unter den v_i , $1 \leq i < n-1$.

Sei v_j der Nachbar.

Dann ist aber $v_j, v_{j+1}, \dots, v_n, v_j$
ein Kreis in \mathbb{R}^2

2. Fall: v_0 hat weiteren Nachbarn
unter den v_i , $1 < i \leq n$.

Gehört wie Fall 2. \square

Beispiel:

$$|E|=4, |V|=5$$



$$|V|=10$$

$$|E|=9$$

Beweis von Satz 4.21:

Beweis durch Induktion über die Anzahl n der Ecken von B .

Induktionsanfang: $n=1$.

In diesem Fall hat B keine Kante, also $n-1=0$ Kanten.

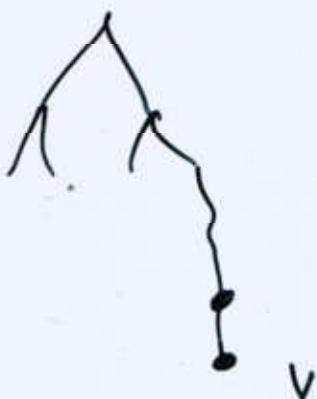
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$.

Annahme: Jeder Baum mit n Ecken hat $n-1$ Kanten.

Sei B ein Baum mit $n+1$ Ecken.

Nach Lemma 4.20 ex. ein Endknoten v von B . Sei B' der Graph, den man erhält, wenn man v und die zu v incidente Kante entfernt.

Kritisch: Ist B' immer noch ein Baum?



Mit v muss ich nur eine Kante entfernen.

B' enthält keine Kreise.

B' ist zusammenhängend.

Seien $a, b \in V(B')$, $a \neq b$.

In B existiert ein Weg von a nach b . z.B. v_0, \dots, v_m .

v ist nicht unter den v_i , $0 \leq i \leq m$.

$v \neq a, b$. Für $i \in \{1, \dots, m-1\}$

hat v_i den Grad 2. (Also $v \neq v_i$).

\Rightarrow Der Weg verläuft in B' .

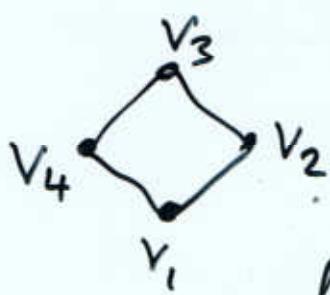
$\Rightarrow B'$ ist ein Baum.

$|V(B')| = n (= |V(B)| - 1)$.

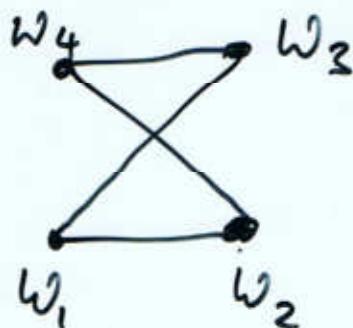
I.A.: $|E(B')| = n-1$.

$\Rightarrow |E(B)| = n$. \square

G



H



f

$$v_1 \xrightarrow{f} w_1$$

$$v_2 \xrightarrow{f} w_2$$

$$v_3 \xrightarrow{f} w_4$$

$$v_4 \xrightarrow{f} w_3$$

$$\{v_2, v_3\} \in E(G)$$

$$\{f(v_2), f(v_3)\}$$

$$= \{w_2, w_4\} \in E(H)$$

$$\{v_2, v_4\} \notin E(G)$$

$$\{f(v_2), f(v_4)\}$$

$$= \{w_2, w_3\} \notin E(H).$$

Sind G und H isomorph, so sind es auch ihre Komplemente.

Sei $f: V(G) \rightarrow V(H)$ ein Isomorphismus.

Beh: f ist auch ein Iso. zwischen Komplementen:

\bar{G} und \bar{H} seien die Komplemente.

Für $v, w \in V(\bar{G}) (= V(\bar{G}))$ mit $v = w$ gilt:

$$\begin{aligned} \{v, w\} \in E(\bar{G}) &\Leftrightarrow \{v, w\} \notin E(G) \\ \Leftrightarrow \{f(v), f(w)\} &\notin E(H) \Leftrightarrow \{f(v), f(w)\} \in E(\bar{H}) \\ \Rightarrow f \text{ ist Iso. zw. } \bar{G} \text{ und } \bar{H}. \end{aligned}$$

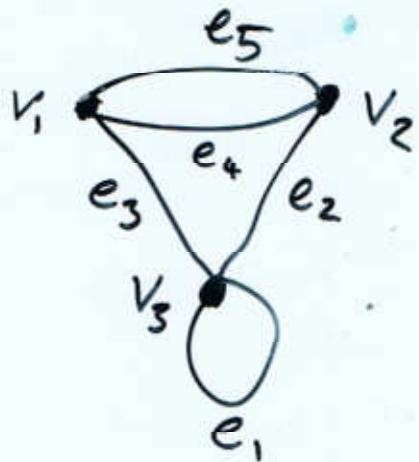
Billiges Beispiel:



Gradfolge: $(3, 2, 2, 1)$



Gradfolge: $(2, 2, 2, 2)$.

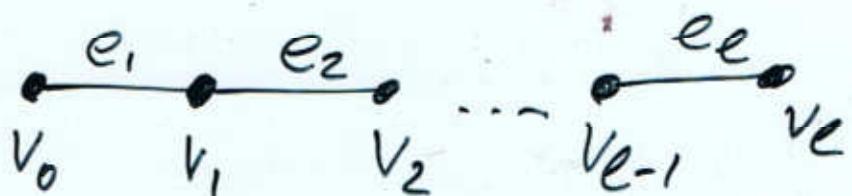


$$V = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad E = \{e_1, \dots, e_5\}.$$

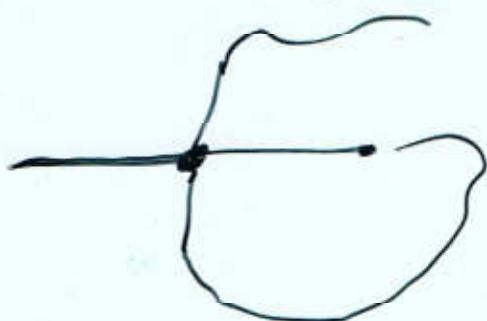
$$f(e_1) = \{v_3\}, \quad f(e_3) = \{v_1, v_3\}$$

$$f(e_2) = \{v_2, v_3\}, \quad f(e_4) = \{v_1, v_2\}$$

$$f(e_5) = \{v_1, v_2\}.$$

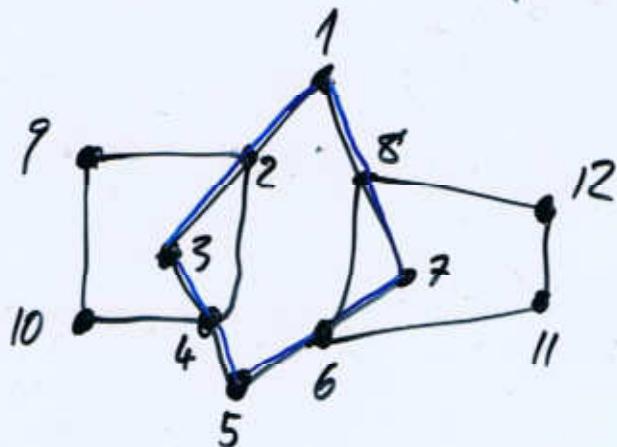


Eulersche Linie \Rightarrow Eulerscher Kreis
 $=$ Eulertour.

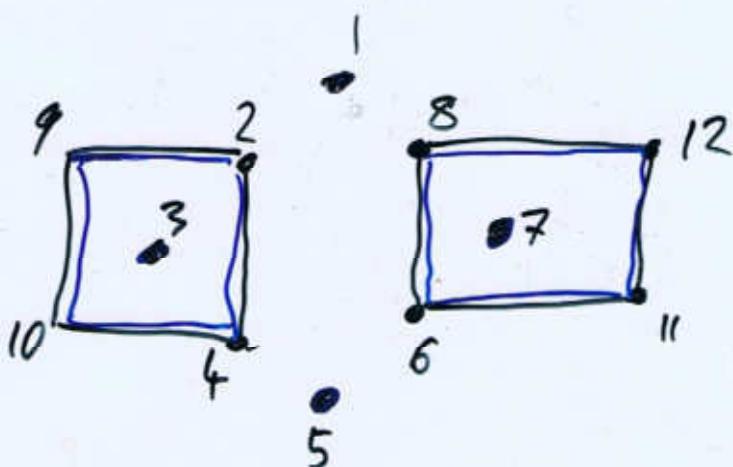


Beweis von Satz 4.32:

Zunächst ein Beispiel:



$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1 \leftarrow$ Kantenzug K
Wir entfernen die blauen Kanten.



Zusammenhangskomponenten:

$$\{2, 4, 9, 10\}, \{6, 8, 11, 12\}, \{1\}, \{3\}, \\ \{5\}, \{7\}.$$

Setze K und Eulersche Linien in den Komponenten zusammen zu einer Eulerischen Linie von G .

Eulersche Linie:

geschlossener Kantenzug,
in dem jede Kante vorkommt.

Beweis von Satz 5.32:

Einfach: Eulerkreis \Rightarrow alle Grad gerad.

Andere Richtung:

Sei G zhl. Multigraph, alle Grade gerade.

Wähle Kantenzug

$v_0, e_1, v_1, \dots, e_l, v_l,$

der weder vorne noch hinten
verlängert werden kann.

Beh: Dieser Kantenzug ist geschlossen.

Angenommen nicht, d.h., $v_0 \neq v_l$.

v_0 berührt ungerade viele der Kanten
 e_1, \dots, e_l , analog für v_l .

$\Rightarrow v_l$ berührt noch eine Kante,
die nicht im Kantenzug vorkommt.

\Rightarrow Der Kantenzug kann verlängert
werden \square

Wissen: Der Kantenzug ist geschlossen.

Erinnerung: Wir beweisen den Satz durch Induktion über die Zahl m der Knoten von G.

Wir sind im Induktionsabschnitt.

Ind. Annahme: Jeder M. graph mit weniger als m Kanten, der zsg. ist und in dem jede Ecke geraden Grad hat, hat Eulerkreis.

Gehe von G zu G' über, indem die Kanten in dem Kantenzug weggelassen werden.

Für jede Komponente von G' gilt:

Alle Knoten haben geraden Grad
Die Komponenten sind zsg.

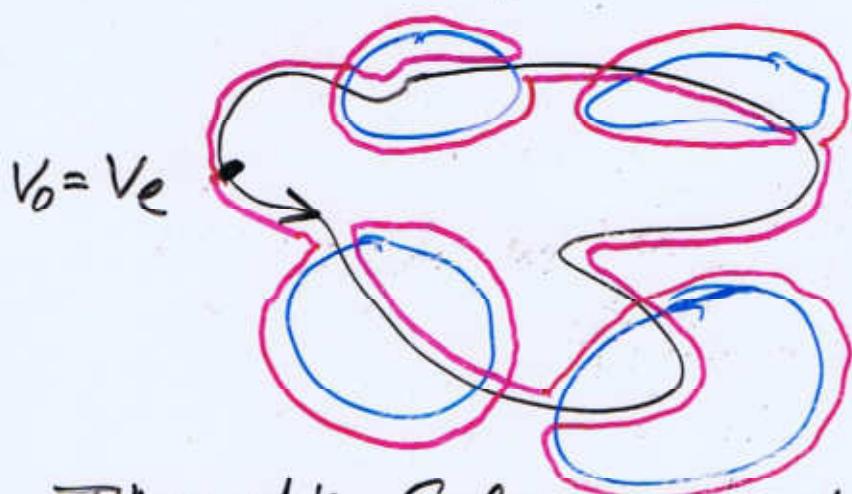
Die Komponenten haben weniger als m Kanten.

\Rightarrow Alle Komponenten von G'

haben Eulerkreise (E.K.)

Wähle eine E.K. für jede Komp.

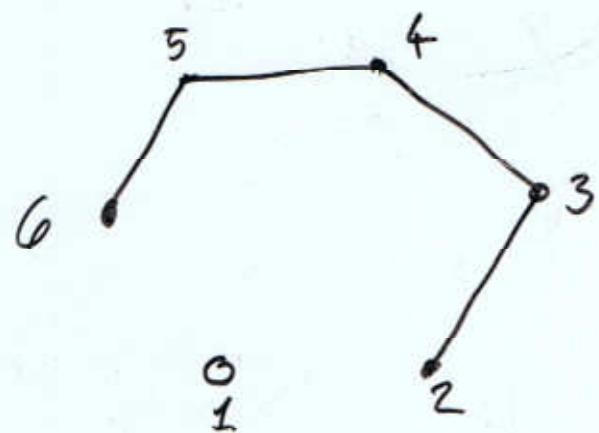
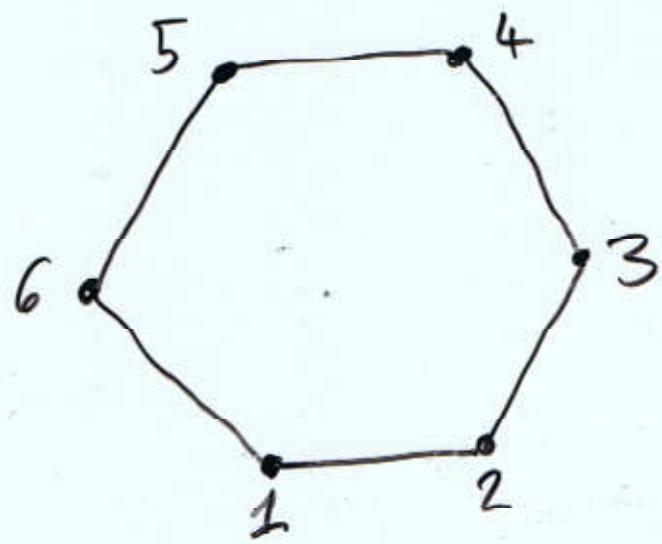
- : Zuerst gewählte Kantenzug
- : Kantenzüge in den Komponenten von G' (Eulerkreise)



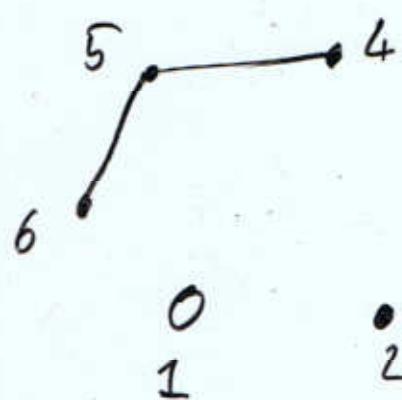
Füge die Eulerkreise der Komponenten von G' an den passenden Stelle in den zuerst gewählten Kantenzug ein.
Das liefert einen Eulerkreis von G □

Kreis:

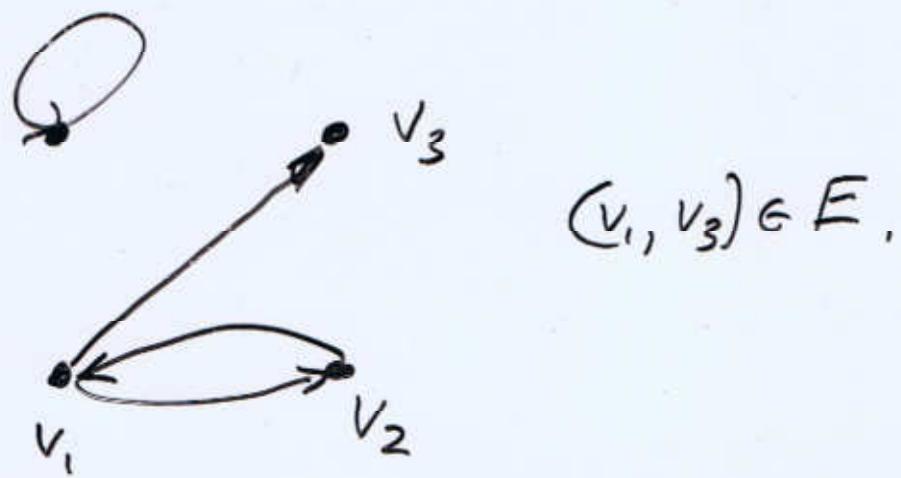
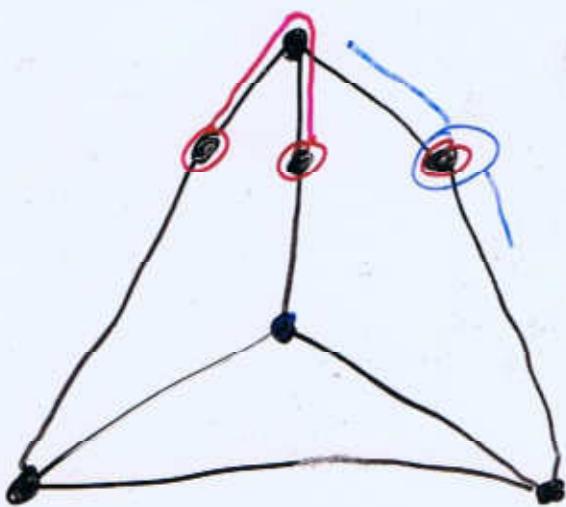




$$A = \{1\}$$



$$0 \ 3 \quad A = \{1, 3\}$$



Ein Kante ist zu einer Ecke inzident, wenn die Ecke einer der beiden Endknoten der Kante ist.

Zwei Ecken sind adjazent, falls sie durch eine Kante ~~verbindet~~ verbunden sind.



e ist zu v inzident.



v und w sind adjazent.

| | v_1 | v_2 | v_3 | \dots | v_n |
|----------|-------|-------|-------|---------|-------|
| v_1 | 0 | | | | |
| v_2 | | 1 | | | |
| \vdots | | | | | |
| v_n | | | | | |

$$(v_2, v_3) \in E(G)$$

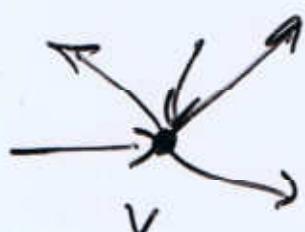
$$(v_1, v_2) \notin E(G)$$

Adjazenzmatrix für Beispiel 5.37:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

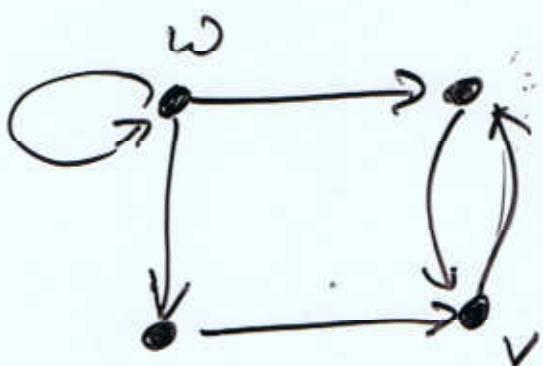
Zweite Darstellung gerichteter Graphen,
Nachbarschaftslisten.

| Knoten | Nachbarn |
|--------|----------|
| 1 | 2, 3, 4 |
| 2 | 4 |
| 3 | 1, 4 |
| 4 | 5 |
| 5 | |



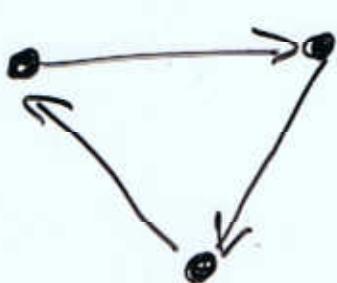
$$d^+(v) = 3$$
$$d^-(v) = 2$$

G



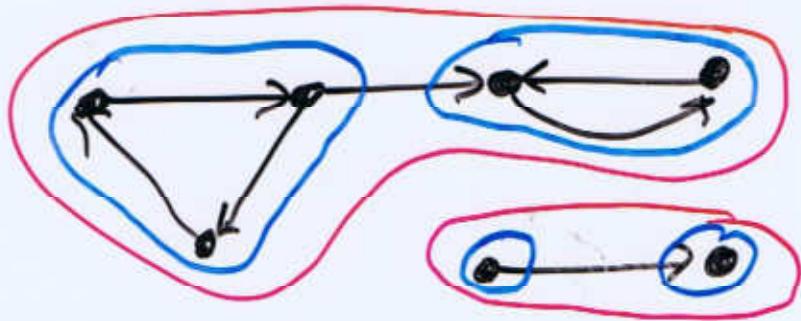
schwach zsh.,
aber nicht
stark zsh.

G_u

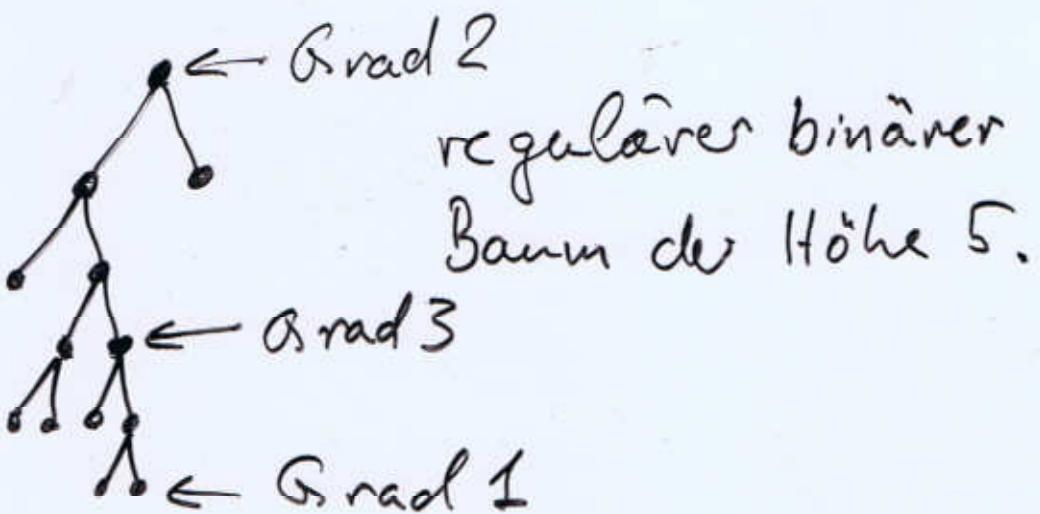
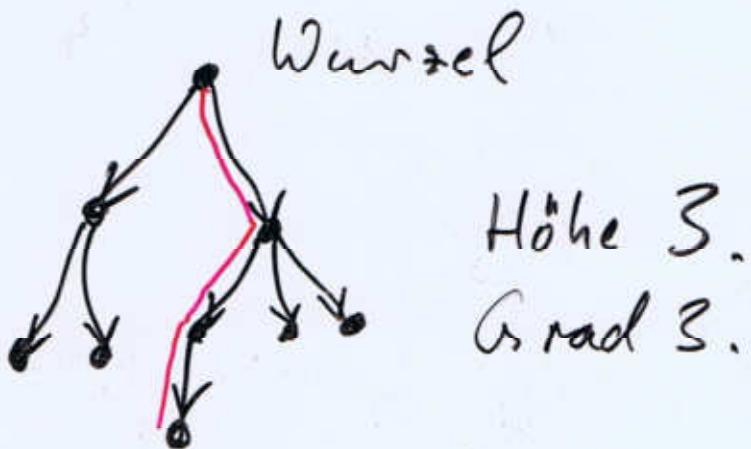


stark zsh.

Die Komponenten von G_u
korrespondieren mit den schwachen
Zusammenhangskomponenten von G .



Schwache Zusammenhangskomp.
Starke Zusammenhangskomp.

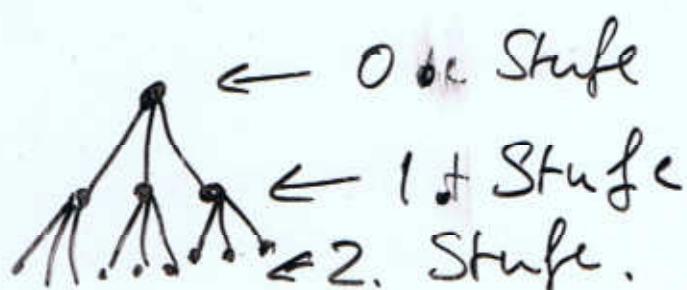


$$\begin{aligned} p \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (n-p-1) \cdot 3 \\ = 2(n-1) \end{aligned}$$

Wir lösen nach p auf.

$$\begin{aligned} p + 2 + (n-1) \cdot 3 - 3p &= \\ -2p + 3n - 1 &= \\ 2(n-1) &= \\ \Rightarrow 2p &= 3n - 1 - 2n + 2 \\ &= n + 1 \\ \Rightarrow p &= \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Bew. Satz 5.44:



0. Stufe hat 1 Element.

1. Stufe hat s Elemente

2. Stufe hat s^2 Elemente

$$\sum_{i=0}^h s^i \stackrel{\text{geom}}{\geq} \text{S. Formel } \frac{s^{h+1}-1}{s-1} \quad \square$$