

# Rückblick:

20. Nov. 2014 [1]

## Erstes Kapitel der Vorlesung:

- Elementare Kombinatorik,  
Grundaufgaben:
  - Wertvolles Hilfsmittel  
zum zeitlichen Planen
- Heuristisches Prinzip:  
Vorläufiges „Aufbauschen“  
kann ein Problem einfacher machen

## Zweites Kapitel der Vorlesung:

- Relationen
  - Wertvolles Hilfsmittel  
zum räumlichen Planen
- Vergleichen Sie die Fachwörter im zweiten Teil der Vorlesung mit alltäglichen Fremdwörtern wie z.B.

"relativ", "lateral" ↗  
"kollateral", engl. „relatives“  
Etymologie: von lat.

"latus, lateris", n.:

"Seite, Flanke"

- Fachwörter im zweiten Kapitel sind weltweit unter mathematisch gebildeten Menschen gebräuchlich

Ein Hinweis zu Def. 4.3: 3  
Ein Hinweis zu Def. 4.3:

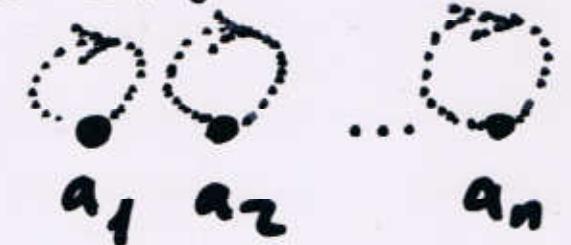
Die Präfixe „irr-“ und  
„anti-“ bedeuten ein  
mehr als „nicht-“, nämlich  
eine „extreme“ Verneinung.

Dass in einem der Fach-  
wörter „irr-“ und in  
einem anderen dann „anti-“  
zum Einsatz kommt, ist  
Zufall und hat höchstens  
„euphonische“ Gründe und bedeutet  
weiter nichts.

Zu Beispiel 4.4:

1. reflexiv:  $\text{Q}_1 \text{Q}_2 \dots \text{Q}_{n_1}$  + evtl.

weitere gerichtete  
Kanten

2. irreflexiv:  + eutl.

weitere gerichtete  
Kanten

3. symmetrisch: 

4. antisymmetrisch:



5. transitiv:



Ein Beispiel für „nicht ganz

Offensichtliche Aussage über  
gerichtete Graphen: [5]

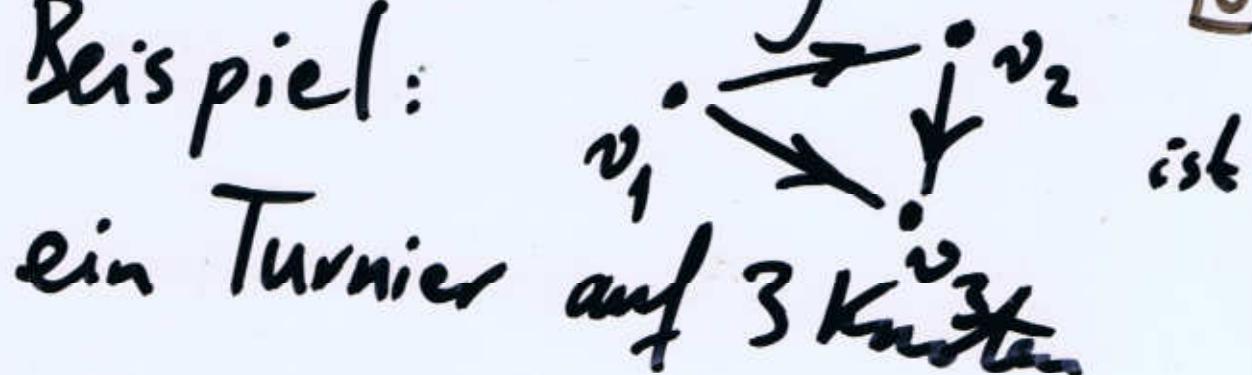
Satz. Jedes Turnier  
(„jeder Turniergraph“)  
enthält einen gerichteten  
Hamilton-Weg.

Dabei :

Turnier := jede gerichtete  
Graph, der aus  
einem vollständigen  
Graphen auf  $n$   
Knoten dadurch  
entsteht, dass jede  
der  $\binom{n}{2}$  zunächst un-  
gerichteten Kante

genau eine beliebige  
Richtung erhält [6]

Beispiel:



gerichteter Hamilton-Weg :=

Sequenz  $(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)})$   
mit  $\{v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n)}\} = \{v_1, \dots, v_n\}$

und  $(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}) \in$  gerichte=  
ten Graphen, für jedes  
 $i \in \{1, \dots, n-1\}$

Vor Kapitel zu Äquivalenz-<sup>L+</sup>  
relationen:

- ~~Merkregel~~

- Alltagsbeispiele zur  
Einführung der Eigenschaft  
von Relationen
- Merkregel zur Def.  
von Äquivalenzrelationen

---

Alltagsbeispiele:

Legende:

Zugrunde  
liegende  
Menge  
mit Relation

Zusammen

symm. antisym. reflexiv irrefl.

Menge endlich-  
vieler Menschen

mit „mag“

0 0 0 0

mit „fürchtet“

0 0 0 0

mit Rel. „ist  
befreundet mit“

1 0 0 1?

mit Rel. „ist höchstens  
so alt wie“

0 1 1 0

mit Rel. „kann  
Gesicht dem  
Namen zuordnen“

0 0 0 0

Menge jetzt: Alle  
Menschen auf der  
Erde in einer

(zu §)

0 "für „nein“

1 "für „ja“

transitiv

0

0

0

1

0

|  |       |           |          |  |  |
|--|-------|-----------|----------|--|--|
| gegenseitig  | Symm. | antisymm. | reflexiv | intransitiv  | transitiv                              |
| z.B. Zehntel =                                       | 0     | 0         | 0        | (Erspiegelt) (im gewisse Weise so dass ein Beispiel für Antisymmetrie) | so dass ein Beispiel für Antisymmetrie |
| sehnen sich Rel. "hat geweckt Augen kontrahiert mit" | 1     | 0         | 0        | (im gewisse Weise so dass ein Beispiel für Reflexivität)               | so dass ein Beispiel für Reflexivität  |

Jetzt zu Äquivalenzrelationen:  
Dazu gleich zu Anfang  
Merkregel:

Äquivalenzrelation: Spezielle Relativitätstheorie  
„symmetrisch“ „reflexiv“ „transitiv“

Partielle Ordnung: Allgemeine Relativitätstheorie  
„antisymmetrisch“ „reflexiv“ „transitiv“

• Diese Merkregel auch insofern  
stimmig als

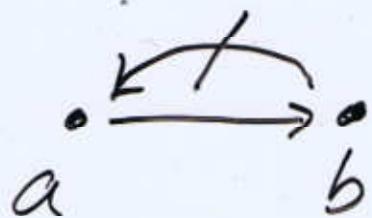
[Äq. rel.  $\rightleftarrows$  Part. Ord.]

und  $\{ \text{Sp. Rel.-Th.} \} \rightleftarrows \{ \text{Allg. Rel.-Th.} \}$

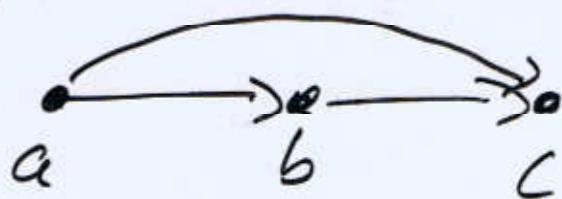
Reflexiv:



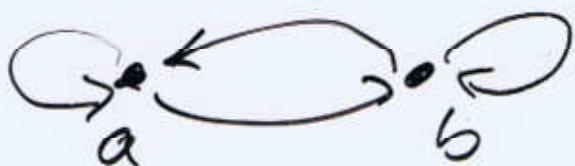
Antisymmetrisch:

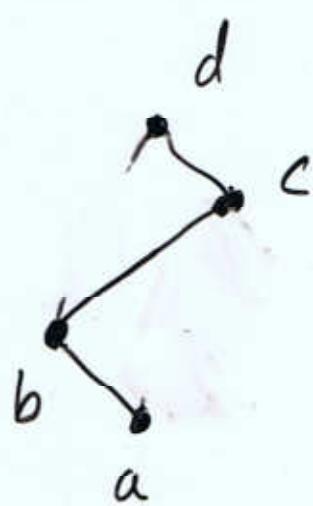
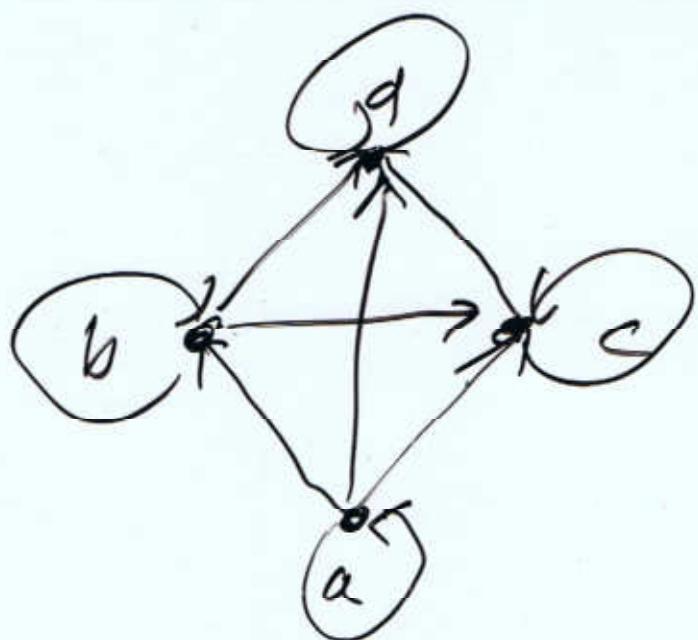


Transitiv:



Beispiel:







$R^+ = R \cup \{(a, b) : \text{ex } n \geq 2 \text{ und}$   
 $a_1, \dots, a_n \in A \text{ mit}$   
 $(a_1, a_2) \in R, \dots, (a_{n-1}, a_n) \in R\}$ .

$R^+$  ist transitiv:

Seien  $a, b, c \in A$  mit  $(a, b), (b, c) \in R^+$

Zeigen:  $(a, c) \in R^+$ ,

$(a, b) \in R^+ : (a, b) \in R$  oder

ex.  $n \geq 2$  und  $a_1, \dots, a_n$

$a_1, \dots, a_n$  Weg von  $a$  nach  $b$ .

Analog für  $(b, c)$ :  $(b, c) \in R$   
oder es ex  $m \geq 2$  und ein Weg  
 $b_1, \dots, b_m$  von  $b$  nach  $c$ .

$a_1, \dots, a_n = b_1, \dots, b_m$  ist  
ein Weg von  $a$  nach  $c$ .  
 $\Rightarrow (a, c) \in R^+$ .

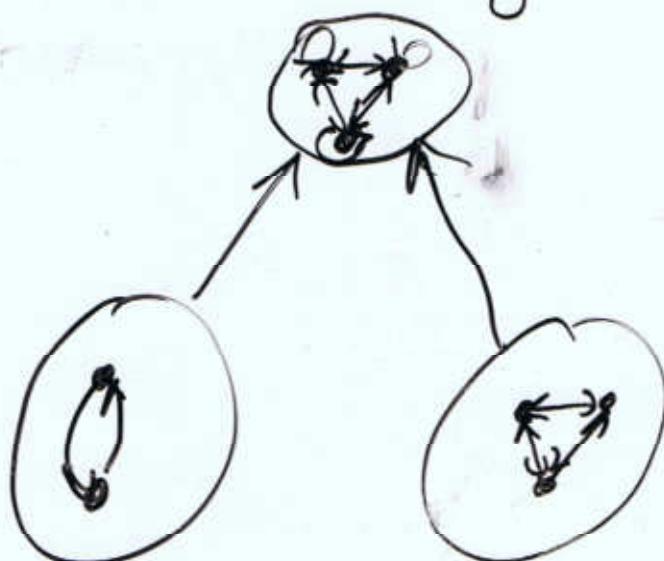
---

Beispiel.



---

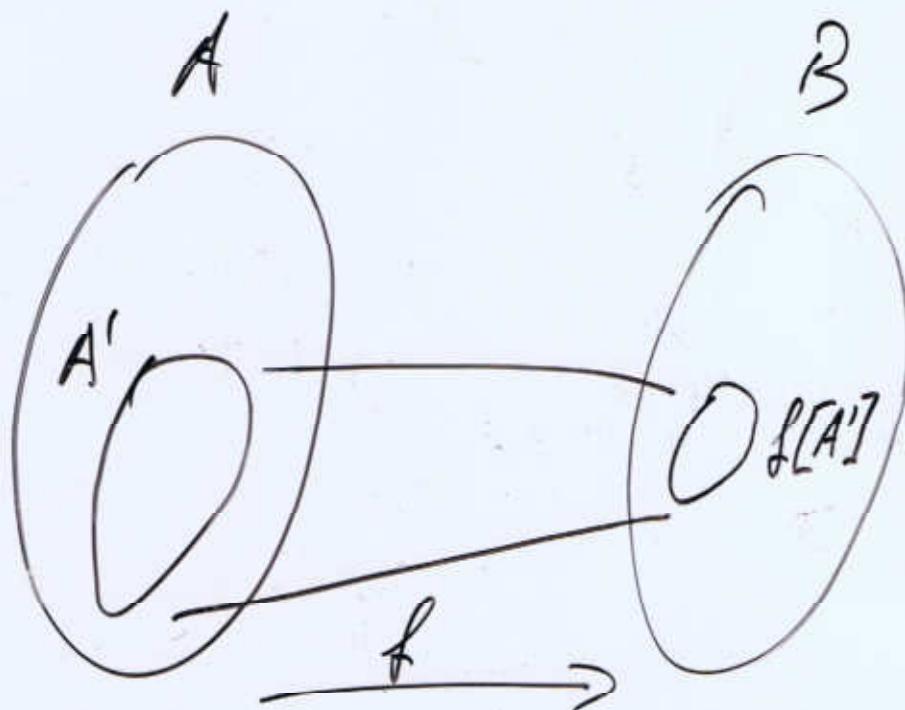
Quasiordnung:

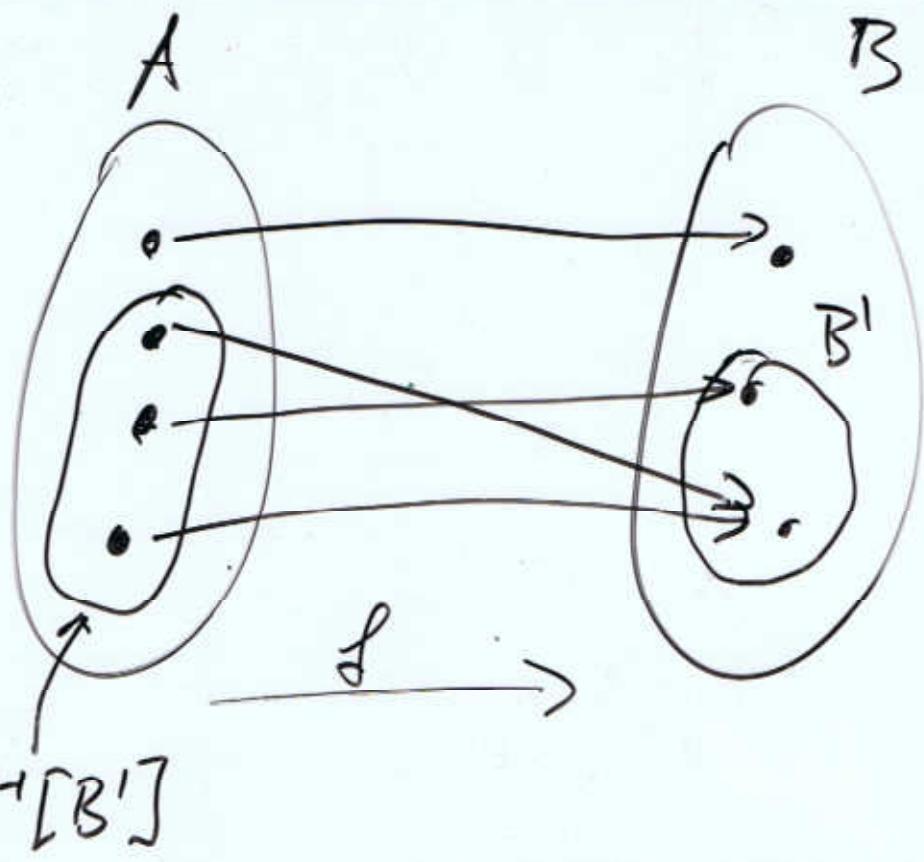


$$R = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 : a + b = c\}$$

(a) : Einstupel

$$(a) = a.$$





$$\begin{aligned}
 f[A'] &= \{f(3), f(4), f(5)\} \\
 &= \{1, 2, 1\} = \{1, 2\}.
 \end{aligned}$$

$$f^{-1}[B'] = \{1, 2, 4\}.$$

$$2. f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$$

$$3. f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$$

$$4. f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$$

---

Beweis: 2. " $\subseteq$ ": Sei  $b \in f[A_1 \cup A_2]$ .

Dann ex  $a \in A_1 \cup A_2$  mit  
 $b = f(a)$ .

Fall 1:  $a \in A_1$ . Dann ist  $b \in f[A_1]$ .

$$\Rightarrow b \in f[A_1] \cup f[A_2].$$

Fall 2:  $a \in A_2$ . Analog.

" $\supseteq$ ": Sei  $b \in f[A_1] \cup f[A_2]$ .

1. Fall:  $b \in f[A_1]$ .

Dann ex.  $a \in A_1$  mit  $f(a) = b$ .

$a \in A_1 \cup A_2 \Rightarrow b \in f[A_1 \cup A_2]$ .

2. Fall:  $b \in f[A_2]$ : Analog.

Beweis von 3.:  $\subseteq$ .

Sei  $a \in f^{-1}[B_1 \cap B_2]$ .

$f(a) \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow f(a) \in B_1$ ,

und  $f(a) \in B_2$ .

D.h.  $a \in f^{-1}[B_1]$  und  $a \in f^{-1}[B_2]$ ,

$\Rightarrow a \in f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$ .

" $\supseteq$ " Sei  $a \in f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$ .

$\Rightarrow f(a) \in B_1$  und  $f(a) \in B_2$ ,

$\Rightarrow f(a) \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in f^{-1}[B_1 \cap B_2]$ .  $\square$

