

① 29.1.15

Erinnerung: Seien $p, m \in K[X]$,
 $m \neq 0$. Dann existieren $q, r \in K[X]$
mit $p = q \cdot m + r$ und
 $\text{grad } r < \text{grad } m$.

Zum Beweis von Satz 8.25:

Sei $p(a) = 0$. Setze $m = X - a$.

Wähle $q, r \in K[X]$ mit

$$p = q \cdot (X - a) + r$$

und $\text{grad } r < 1$.

Also ist r konstant und damit
 $r \in K$.

Es gilt $0 = p(a) = q(a) \cdot (a - a) + r$

$$\Rightarrow p = q \cdot (X - a) + r$$

$\Rightarrow (X - a)$ teilt p . \square

$$p = q \cdot m + r$$

$$\begin{aligned} p(a) &= q(a) \cdot m(a) + r(a) \\ &= q(a) (a - a) + r \end{aligned}$$

Beweis von Kor. 8.26:

(2)

Induktion über n .

Induktionsanfang: $n=1$.

$$\text{grad } p = 1 \Rightarrow p = a_1 X + a_0.$$

$$p = a_1 X + a_0, \quad a_0, a_1 \in K, a_1 \neq 0.$$

$$a_1 X + a_0 = 0 \quad | -a_0$$

$$a_1 X = -a_0 \quad | : a_1$$

$$X = -\frac{a_0}{a_1}.$$

$\Rightarrow p$ hat genau eine NST,
nämlich $x = -\frac{a_0}{a_1}$.

Induktionsschritt: Sei $n \geq 1$.

Angenommen, jedes Polynom vom Grad $\leq n$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

Wir zeigen: Jedes Polynom vom Grad $n+1$ hat höchstens $n+1$ NST'n.

Sei also p ein Polynom vom Grad $n+1$. ③

Wir können annehmen, dass p eine NST $a \in K$ hat.

Dann ist p durch $X-a$ teilbar (Satz 8.25). Also ex. $q \in K[X]$ mit $p = q \cdot (X-a)$.

Angenommen $b \in K[X]$ ist NST von p .

Dann gilt $q(b) \cdot (b-a) = 0$

$\Rightarrow q(b) = 0$ oder $(b-a) = 0$.

Also ist b NST von q oder $b=a$.

Alle NST'n von p , die von a verschieden sind, sind NST'n von q .

Wegen $\text{grad } p = n+1$ und

$p = q \cdot (X-a)$ ist $\text{grad } q = n$.

Nach Annahme hat q höchstens n verschiedene NST'n.

$\Rightarrow p$ hat höchstens $n+1$ verschiedene NST'n. \square

Beispiel: $p = 2x - 1$

④

$$2x - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Satz 8.27 gilt hier nicht,
da p nicht normiert ist.

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = \underline{\underline{x^2 - 5x + 6}}$$

$$-(x^3 - x^2)$$

$$0 - 5x^2 + 11x$$

$$-(-5x^2 + 5x)$$

$$0 + 6x - 6$$

$$-(6x - 6)$$

$$0$$

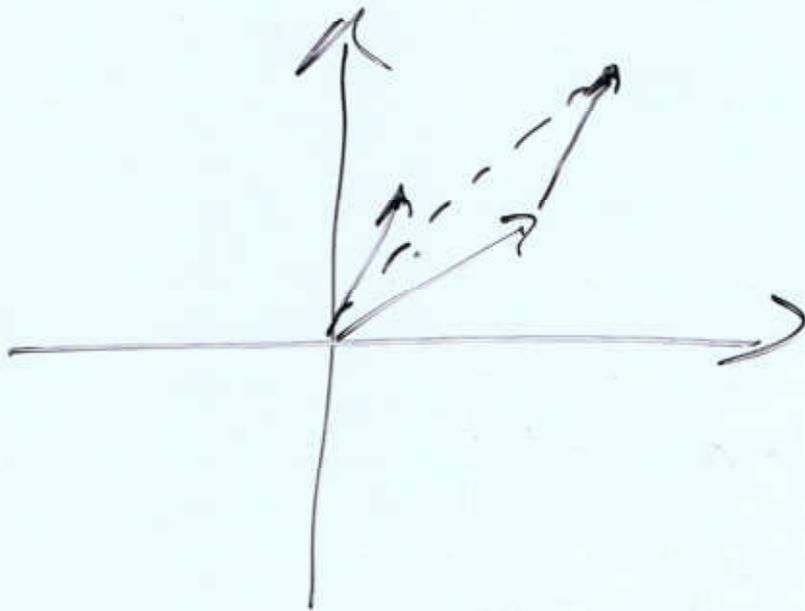
$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

Schlampig: $x = \sqrt{-1}$.

① 30.1.15



Beweis von a):

$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ &= (b_1 + a_1, \dots, b_n + a_n) = \\ &= (b_1, \dots, b_n) + (a_1, \dots, a_n).\end{aligned}$$

$\Rightarrow K^n$ ist abelsch.

$$\text{klar: } (a_1, \dots, a_n) + (0, \dots, 0)$$

$$= (a_1 + 0, \dots, a_n + 0) = (a_1, \dots, a_n).$$

$\Rightarrow (0, \dots, 0)$ ist neutrales Element.

$(-a_1, \dots, -a_n)$ ist zu (a_1, \dots, a_n)
invers. \square

Beweis b) 2.:

②

$$(\alpha + \beta)(a_1, \dots, a_n) =$$

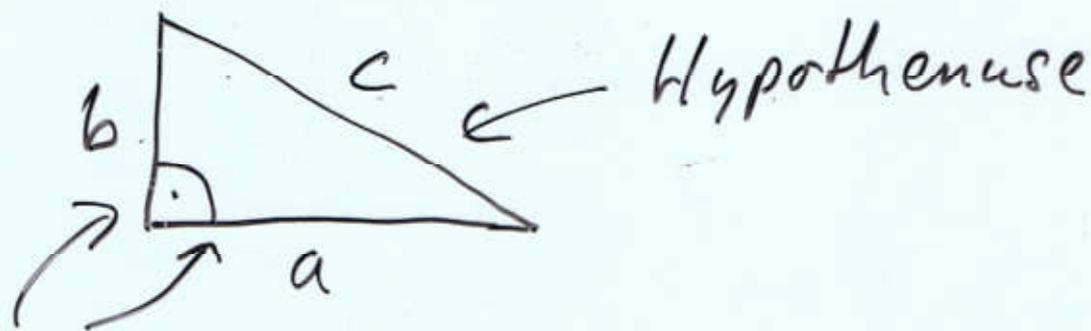
$$((\alpha + \beta)a_1, \dots, (\alpha + \beta)a_n) =$$

$$(\alpha a_1 + \beta a_1, \dots, \alpha a_n + \beta a_n) =$$

$$(\alpha a_1, \dots, \alpha a_n) + (\beta a_1, \dots, \beta a_n)$$

$$\alpha(a_1, \dots, a_n) + \beta(a_1, \dots, a_n) \quad \square$$

Satz des Pythagoras:



Katheten

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\langle (a, b), (a, b) \rangle = a^2 + b^2 = c^2$$

$$v = (a_1, \dots, a_n)$$

(3)

$$\langle v, v \rangle = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

$$|v| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$\langle \alpha(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle$$

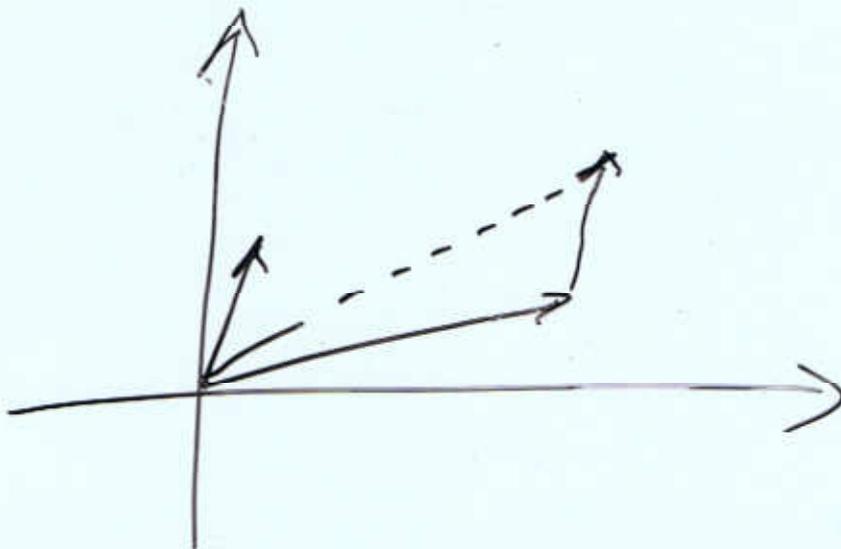
$$= \langle (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle$$

$$= \alpha a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 + \dots + \alpha a_n b_n$$

$$= \alpha (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)$$

$$= \alpha \langle v, w \rangle.$$

$$|\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|.$$



Beispiel:

④

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq 2 \wedge 1 \leq j \leq 3}$$

ist eine 2×3 -Matrix.

$$a_{22} = 4$$

$$a_{11} = 1, a_{21} = 3.$$

$$l = 2, m = 2, n = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B$ wird eine 2×3 -Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\square = \langle (1,0), (2,0) \rangle = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 2$$

$$\square = \langle (2,1), (2,0) \rangle = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 4$$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 2 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}$$

⑤

$$\square = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle A | B \rangle = \text{Adi Bet}$$

↑
Operans

$$\langle e | =$$

$$e | \rangle =$$

$m \times n$ -Matrix: m Zeilen,
 n Spalten.

a_{ij} ist der Eintrag in der
 i -ten Zeile und j -ten Spalte.
Erst der Zeilenindex, dann der
Spaltenindex (ZVS: Zeile vor Spalte)

